**Science Innovation**
2019; 7(2): 48-58
http://www.sciencepublishinggroup.com/j/si
doi: 10.11648/j.si.20190702.11
ISSN: 2328-7861 (Print); ISSN: 2328-787X (Online)

# Study on the Infinity of Twin Primes by Applying *Sundaram's Sieve Method*

**Yan Kuiying**

Xuchang School of Supply and Marketing, Xuchang, China

**Email address:**
yky3322769@163.com

**To cite this article:**
Yan Kuiying. Study on the Infinity of Twin Primes by Applying Sundaram's Sieve Method. *Science Innovation*. Vol. 7, No. 2, 2019, pp. 48-58. doi: 10.11648/j.si.20190702.11

**Received**: April 8, 2019; **Accepted**: May 21, 2019; **Published**: June 15, 2019

**Abstract:** Up to now, around the world, Dr. Zhang Yitang from the University of New Hampshire offers the best research results of the infinity of twin primes. In 2013, Dr. Zhang proved the infinity of twin primes that are 70,000,000 apart and received the 2014 Frank Nelson Cole Prize in Number Theory. This study suggests new ways to find prime numbers, twin primes, and triplet primes by applying *Sundaram's Sieve Method and* finds the general solution and character of the an+b subset of matrix 2xy+x+y. Besides, by studying the problem that 3n+2 is not the subset of K∪L with three methods, the author finds the way to prove the infinity of twin primes and detailed proofs are presented in this paper. It offers new way to study triplet primes and n-plet primes conjectures.

**Keywords:** Prime Number, Twin Prime, Triplet Prime, Sundaram's Sieve Method

# 用辛达拉姆筛法探讨孪生素数无穷多

**闫魁迎**

河南省许昌市供销学校，许昌，中国

**邮箱**
yky3322769@163.com

**摘要：**孪生素数无穷多问题目前世界上最好的研究结果是美国新罕布什尔大学的张益唐博士，2013年证明了两个相差7千万的素数有无穷多，荣获2014年科尔数论等世界大奖.本文用辛达拉姆（Snndaram）发明的一种新筛法找出了求素数、孪生素数、三生素数的新求法，找出了数阵2xy+x+y的an+b型子集的通解和特点，并用三种方法分析了3n+2不是K∪L的子集，从中发现了证明孪生素数无穷多的方法，并给出了详细证明，对研究三生素数猜想和n生素数猜想找出了新途径。

**关键词：**素数，孪生素数，三生素数，辛达拉姆筛法

## 1．引言

1934年辛达拉姆发明了一种新的筛法，核心是用数阵通项 $a_{nm}=(2m+1)n+m$ 构造下面的数阵——辛达拉姆表[1]：

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | ... |
| 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 37 | ... |
| 10 | 17 | 24 | 31 | 38 | 45 | 52 | ... |
| 12 | 22 | 31 | 40 | 49 | 58 | 67 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

辛达拉姆发现：若自然数N出现在上面的数阵中，则2N+1不是素数；若N不在上面数阵中出现，则2N+1必定是素数[1].

本文应用辛达拉姆筛法探讨孪生素数是否无穷多.

记：K={2xy+x+y｜x. y∈ $N^+$ }, L={2xy+x+y-1｜x. y∈ $N^+$ }, S={2xy+x+y-3｜x. y∈ $N^+$ }.其中x≥1, y≥1为自然数. $N^+$ :1,2,3, …为自然数.

因为(2m+1)n+m=2nm+n+m,记：K={2xy+x+y｜x. y∈ $N^+$ }，所以

即有下述：设Q是正整数，则 2Q＋1是素数<=> Q∉ K

## 2．基础知识

命题1 当Q=2xy＋x＋y，x、y均为自然数时，2Q+1是奇合数[2].

证明 ∵ 2Q+1=2（2xy ＋ x ＋ y）+1=4xy+2x+2y+1=(2x+1)(2y+1)

显然：当x、y为自然数时，2x+1、2y+1是奇数,所以(2x+1)(2y+1）是奇合数.从而当Q=2xy＋x＋y时，2Q+1是奇合数，命题1成立.

于是可得到下面的命题[3]

命题2 奇合数的一切解可用下面公式给出：

$$H=4xy+2x+2y+1$$

其中x、y为自然数.

证明显然当x= 1、2、3、…自然数时，一切被3整除的奇合数公式是3（2x+1);一切被5整除的奇合数公式是5（2x+1);一切被7整除的奇合数公式是7（2x+1);一切被9整除的奇合数公式是9（2x+1);一切被(2y+1)整除的奇合数公式是(2y+1)（2x+1),其中y=1、2、3、…自然数.

∵(2y+1)(2x+1)=4xy+2x+2y+1 = H.

∴命题2成立

命题3 当正整数Q≠2xy＋x＋y时,2Q+1是奇素数集合.

证明 ∵由命题2可知，当正整数Q=2xy＋x＋y时，2Q+1是奇合数的集合.

又∵ 当Q≠2xy＋x＋y时，2Q+1也是奇数，且不在奇合数集合内.

∴当Q≠2xy＋x＋y时，2Q+1必是奇素数.

命题4 一切大于2的素数可以表示为[4]

$$p=2Q+1 \tag{1}$$

其中Q∉ K取正整数.

证明 ∵由命题3可知，当Q≠2xy＋x＋y取正整数时，2Q+1是奇素数集合，素数中只有2是偶素数.

∴一切大于2的素数可用(1)表示.

又∵我们记：K={2xy+x+y｜x. y∈ $N^+$ },其中x≥1, y≥1为自然数. $N^+$ :1,2,3, …为自然数.

∴即有下述：设Q是正整数，则 2Q+1 是大于2的素数<=> Q∉ K

∴命题4成立，证毕.

命题5 一切孪生素数可表示为[5]

$$\begin{cases} 2Q+1 \\ 2(Q+1)+1 \end{cases} \tag{2}$$

其中Q∉ K∪L取正整数.

所谓孪生素数，即：3、5；5、7；11、13；17、19；29、31；…两素数差2的素数组[5].

证明∵当Q≠2xy＋x＋y取正整数时，由命题3可知2Q+1是素数.同理当Q+1≠2xy＋x＋y取正整数时，由命题3可知2(Q+1)+1也是素数.

又∵2(Q+1)+1-(2Q+1)=2

∴当正整数Q≠2xy＋x＋y且Q+1≠2xy＋x＋y时，2Q+1与2(Q+1)+1的值都是孪生素数.

∵我们记：K={2xy+x+y｜x. y∈ $N^+$ }, L={2xy+x+y-1｜x. y∈ $N^+$ }, 其中x≥1, y≥1为自然数. $N^+$ :1,2,3, …为自然数.

∴即有下述：设Q是正整数，则 $\begin{cases} 2Q+1 \\ 2(Q+1)+1 \end{cases}$ 是孪生素数<=> Q∉ K∪L

∴命题5成立，证毕.

命题6 一切三生素数可表示为[5]

$$\begin{cases} 2Q+1 \\ 2(Q+1)+1 \\ 2(Q+3)+1 \end{cases} \tag{3}$$

其中Q∉ K∪L∪S取正整数.

所谓三生素数，即：5、7、11；11、13、17；17、19、23；41、43、47；…第1个素数与第2个素数差2，且第1个素数与第3个素数差6的素数组[6].

证明 ∵当Q≠2xy＋x＋y取正整数时，由命题3可知2Q+1是素数.同理当Q+1≠2xy＋x＋y取正整数时，由命题3可知2(Q+1)+1也是素数，当Q+3≠2xy＋x＋y取正整数时，由命题3可知2(Q+3)+1也是素数.

又∵2(Q+3)+1-(2Q+1)=6， 2(Q+1)+1-(2Q+1)=2

∴当正整数Q≠2xy＋x＋y且Q+1≠2xy＋x＋y、Q+3≠2xy＋x＋y时，2Q+1、2(Q+1)+1和2(Q+3)+1的值都是三生素数[7].

∵我们记：K={2xy+x+y｜x. y∈ $N^+$ }, L={2xy+x+y-1｜x. y∈ $N^+$ }, S={2xy+x+y-3｜x. y∈ $N^+$ }.其中x≥1, y≥1为自然数. $N^+$ :1,2,3, …为自然数.

∴即有下述：设Q是正整数，则 $\begin{cases} 2Q+1 \\ 2(Q+1)+1 \\ 2(Q+3)+1 \end{cases}$ 是三生素数<=> Q∉ K∪L∪S

∴命题6成立，证毕.

显然由命题4、命题5、命题6可作下列定义：

定义1 称不属于K的正整数为奇素数的根.

定义2 称不属于K且又不属于L的正整数为孪生素数的根.

定义3 称不属于K且又不属于L同时还不属于S的正整数为三生素数的根.

## 3．用辛达拉姆筛法求奇素数

设x，y为自然数时，按从小到大的顺序将2xy+x+y的值排列如下（由辛达拉姆表可知）[1]：

4、7、10、12、13、16、17、19、22 …,

与上面对应余下来的正整数就是（1）中奇素数根Q的值.

即Q=1、2、3、5、6、8、9、11、14、15、18、20、21、….

将Q=1、2、3、5、6、8、9、11、14、15、18、20、21、…分别代入（1）得：3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、…其都是奇素数.

## 4．用辛达拉姆筛法求孪生素数

设x，y为自然数时，按从小到大的顺序将2xy+x+y的值排列如下（由辛达拉姆表可知）[1]：

4、7、10、12、13、16、17、19、22 …,

则按从小到大的顺序将2xy+x+y-1的值排列如下

3、6、9、11、12、15、16、18、21 …,

再将2xy+x+y和2xy+x+y-1两式中的值按顺序从小到大排列如下：

3、4、6、7、9、10、11、12、13、15、16、17、18、19、21、22 …,

与上面对应余下的正整数就是（2）中孪生素数根Q的值.

即Q=1、2、5、8、14、20、…,

将Q=1、2、5、8、14、20、…分别代入（2）得：3、5；5、7；11、13；17、19；29、31；41、43；…其都是孪生素数.

## 5．用辛达拉姆筛法求三生素数

设x，y为自然数时，按从小到大的顺序将2xy+x+y的值排列如下（由辛达拉姆表可知）[1]：

4、7、10、12、13、16、17、19、22 …,

则按从小到大的顺序将2xy+x+y-1的值排列如下

3、6、9、11、12、15、16、18、21 …,

按从小到大的顺序将2xy+x+y-3的值排列如下

1、4、7、9、10、13、14、16、19 ….,

再将2xy+x+y、2xy+x+y-1和2xy+x+y-3三式中的值按顺序从小到大排列如下：

1、3、4、6、7、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、21、22、…,

与上面对应余下的正整数就是（3）中三生素数根Q的值.

即Q=2、5、8、20、….

将Q=2、5、8、20、…分别代入（3）得：5、7、11；11、13、17；17、19、23；41、43、47；…其都是三生素数.

## 6．六个通解式

∵ 2xy+x+y=(2x+1)y+x, 当 x=1,2,3,4,5,6… 时，(2x+1)y+x=3y+1; 5y+2; 7y+3; 9y+4; 11y+5; 13y+6; 15y+7; 17y+8;…

∴2xy+x+y的an+b型全体子集可分为两种类型：一种y的系数是3，5，7，11，13，17…奇素数的集合称为K的an+b型奇素数类集合.另一种y的系数是9，15，21…奇合数的集合称为K的an+b型奇合数类集合[8].

同理当x=1,2,3,4,5,6…时, (2x+1)y+x-1=3y; 5y+1; 7y+2; 9y+3; 11y+4; 13y+5; 15y+6; 17y+7…

我们可以将y的系数是3，5，7，11，13，17…奇素数的集合称为L的an+b型奇素数类集合.将y的系数是9，15，21…奇合数的集合称为L的an+b型奇合数类集合[9].

同理当x=1,2,3,4,5,6…时, (2x+1)y+x-3=3y-2; 5y-1; 7y; 9y+1; 11y+2; 13y+3; 15y+4; 17y+5…

我们可以将y的系数是3，5，7，11，13，17…奇素数的集合称为S的an+b型奇素数类集合.将y的系数是9，15，21…奇合数的集合称为S的an+b型奇合数类集合.

显然2xy+x+y的an+b型奇素数、奇合数类集合是K的子集，也是K∪L∪S的子集.2xy+x+y-1的an+b型奇素数、奇合数类集合是L的子集，也是K∪L∪S的子集.2xy+x+y-3的an+b型奇素数、奇合数类集合是S的子集，也是K∪L∪S的子集.

为了证明后面命题我们还要先分别求出2xy+x+y、2xy+x+y-1和2xy+x+y-3的an+b型奇素数类子集通解和奇合数类子集通解.

### 6.1．求2xy+x+y、2xy+x+y-1和2xy+x+y-3的an+b型奇素数类子集通解[10]

∵ 2xy+x+y=(2x+1)y+x，2xy+x+y-1=(2x+1)y+x-1, 2xy+x+y-3=(2x+1)y+x-3,

当$2x+1=p$时， $x=\frac{p-1}{2}$

将$x=\frac{p-1}{2}$代人(2x+1)y+x,得

$$py+\frac{p-1}{2} \tag{4}$$

其中p≥3为奇素数， y≥1为自然数.

将$x=\frac{p-1}{2}$代人(2x+1)y+x-1,得

$$py+\frac{p-1}{2}-1 \tag{5}$$

其中p≥3为奇素数， y≥1为自然数.

将$x=\frac{p-1}{2}$代人(2x+1)y+x-3,得

$$py+\frac{p-1}{2}-3 \tag{6}$$

其中p≥7为奇素数， y≥1为自然数.

∴ 2xy+x+y 的 an+b 型奇素数类子集通解是(4)，2xy+x+y-1的an+b型奇素数类子集通解是(5)，2xy+x+y-3的an+b型奇素数类子集通解是(6).

### 6.2．求2xy+x+y、2xy+x+y-1和2xy+x+y-3的an+b型奇合数类子集通解

∵当x=1,2,3,4,5,6…时，

(2x+1)y+x=3y+1; 5y+2; 7y+3; 9y+4; 11y+5; 13y+6; 15y+7; 17y+8;….

记：2xy+x+y的an+b型全体子集可分为两种类型：一种y的系数是3，5，7，11，13，17…奇素数的集合称为K的an+b型奇素数类集合.另一种y的系数是9，15，21…奇合数的集合称为K的an+b型奇合数类集合.

显然3y+1; 5y+2; 7y+3; 11y+5; 13y+6; 17y+8;…y的系数是3，5，7，11，13，17…奇素数的an+b型集合, 也可以用下列通式表示[11]：

$$\mathrm{P}n+\frac{p-1}{2}$$

其中p≥3为奇素数， n≥1为自然数.

显然当n取值与（4）中y的值相同时，上式与（4）全等.

同理，因为9、15、21、25、27、…奇合数可以用$p_1p_2p_3\ldots p_k$(其中$P_1\le P_2\le\ldots\le P_K$取奇素数）表示.

所以 9y+4; 15y+7; 21y+10; 25y+12; 27y+13; 33y+16;…y的系数是9，15，21，25，27，33…奇合数的an+b型集合可以用下列代数式表示[12]：

$p_1p_2p_3\ldots p_k n+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$(其中$P_1\le P_2\le\ldots\le P_K$取奇素数、n≥1取正整数）

显然：当上式以 p(p≥3取素数)取模时，由剩余理论可知[13]，可将上式可分解成一组完全剩余系如下（即分成由p个子集合之并且除p余0、1、2、…p-1各一个，共分成p个子集合）.即：

$\{p_1p_2\ldots p_k n+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid n\in N^+\}=\{pp_1p_2\ldots p_k n_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\{pp_1p_2\ldots p_k n_1+p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\{pp_1p_2\ldots p_k n_1+2p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\ldots\cup\{pp_1p_2\ldots p_k n_1+(P-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid n_1\in N^+\}$

由此,依据上式等号右边的一组完全剩余系可推出以下通解

2xy+x+y除p余0、1、2、3、…、p-1的全体an+b型奇合数类子集通解式[13]

$$\begin{cases} pp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ \vdots \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+(p-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \end{cases} \tag{7}$$

其中 $p_1$、$p_2$、⋯、$p_k$ 均不等于p ,且 $p_1\le p_2\le\cdots\le p_k$ 均为奇素数， $n_1\ge 0, x\ge 1, y\ge 1$ 为自然数.

同理2xy+x+y-1除p余0、1、2、3、…、p-1的全体an+b型奇合数类子集通解

$$\begin{cases} pp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ \vdots \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+(p-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \end{cases} \tag{8}$$

其中 $p_1$、$p_2$、$p_3$、⋯、$p_k$、$n_1$、$x$、$y$ 与（7）中要求一致.

同理2xy+x+y-3除p余0、1、2、3、…、p-1的全体an+b型奇合数类子集通解[14]

$$\begin{cases} pp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ \vdots \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+(p-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \end{cases} \tag{9}$$

其中：∵当$p_1p_2p_3\ldots p_k<7$时， $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3<0$，（9）中第1个集合是an-b的集合.

∴只有 $p_1p_2p_3\ldots p_k\geqq 7$，（9）才全部是an+b的集合.

$p_1$、$p_2$、⋯、$p_k$ 均不等于p ,且 $p_1\le p_2\le\cdots\le p_k$ 均为奇素数， $n_1\ge 0, x\ge 1, y\ge 1$ 为自然数.

又∵本文记：K={2xy+x+y | x， y∈$N^+$}，L={2xy+x+y-1 | x， y∈$N^+$}，S={2xy+x+y-3 | x， y∈$N^+$},其中x、 y≥1为自然数. $N^+$:1,2,3, …为自然数.

∴（7）是K的an+b型奇合数类子集通解.

（8）是L的an+b型奇合数类子集通解.

（9）是S的an+b型奇合数类子集通解.

∴（7）、（8）、(9)是K∪L∪S的an+b型奇合数类子集通解.

## 7．预备命题

命题7：K∪L的an+b型奇合数类子集有且仅有（7）、（8）通解.

证明：假设K∪L除（7）、（8）以外还有an+b型奇合数类子集通解.

∵由唯一分解定理可知[15]，an+b型奇合数类中n的系数a每一个数，如果不计素因数的分解次序，则它分解素因数的结果是唯一的.

∴若K∪L除（7）、（8）以外还有新的an+b型奇合数类子集通解，则式中 $n_1$ 的系数必与（7）、（8）中的 $n_1$ 系数相同，只有余数不同，则可写成如下形式：

$$\begin{cases} pp_1p_2\cdots p_kn_1+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ \vdots \\ pp_1p_2\cdots p_kn_1+(p-1)p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \end{cases} \tag{10}$$

其中 $p_1$、$p_2$、$p_3$、…、$p_k$、$n_1$、$x$、$y$ 要求与前一致.

∵ 当j=0时，（10）与（7）一致；

当j=1时，（10）与（8）一致.

∴j≠0, j≠1.

又∵当j≠0，j≠1时，由命题1可知，当Q≠2xy+x+y，Q+1≠2xy+x+y，Q+j≠2xy+x+y时，2Q+1,2(Q+1)+1,2（Q+j）+1是 三个奇素数，已超出孪生素数.例如当j=3时，是三生素数（3）式.

∴出现矛盾，假设不成立.

∴命题7成立.

## 8．用辛达拉姆筛法证明孪生素数无穷多

我们先从下列例题中找出一个规律，可用这个规律引入孪生素数无穷多的等价命题，

例1 当p=5时，在3n、3n+1、3n+2三个集合中：

1)．将n=1代入3n+2得5， 将Q=5代入（2）得：11、13；

因为11、13是孪生素数，则5是孪生素数根，所以当n≥1取正整数时，3n、3n+1、3n+2三个集合中：至少有 1个集合是含有孪生素数根的集合.

例2 当p=5时，在5n、5n+1、5n+2、5n+3、5n+4五个集合中：

1)．将n=1代入5n得5，将Q=5代入（2）得：11、13；

2)．将n=1代入5n+3得8，将Q=8代入（2）得：17、19；

3)．将n=2代入5n+4得14，将Q=14代入（2）得：29、31；

因为11、13；17、19；29、31都是孪生素数，则5、8、14都是孪生素数根，所以当n≥1取正整数时，在5n、5n+1、5n+2、5n+3、5n+4五个集合中：至少有 3个集合是含有孪生素数根的集合.

例3 当p=7时，在7n、7n+1、7n+2、7n+3、7n+4、7n+5、7n+6七个集合中：

1)．将n=2代入7n得14，将Q=14代入（2）得：29、31；

2)．将n=1代入7n+1得8，将Q=8代入（2）得：17、19；

3)．将n=7代入7n+4得53，将Q=53代入（2）得：107、109；

4)．将n=9代入7n+5得68，将Q=68代入（2）得：137、139；

5)．将n=2代入7n+6得20，将Q=20代入（2）得：41、43；

因为29、31；17、19；107、109；137、139；41、43都是孪生素数，则14、8、53、68、20都是孪生素数根，所以当n≥1取正整数时，在7n、7n+1、7n+2、7n+3、7n+4、7n+5、7n+6七个集合中：至少有 5个集合是含有孪生素数根的集合.

例4 当p=11时，在11n、11n+1、11n+2、11n+3、11n+4、11n+5、11n+6、11n+7、11n+8、11n+9、11n+10十一个集合中：

1)．将n=19代入11n得209，将Q=209代入(2)得：419、421；

2)．将n=8代入11n+1得89，将Q=89代入（2）得：179、181；

3)．将n=3代入11n+2得35，将Q=35代入（2）得：71、73；

4)．将n=10代入11n+3得113，将Q=113代入（2）得：227、229；

5)．将n=4代入11n+6得50，将Q=50代入（2）得：101、103；

6)．将n=2代入11n+7得29，将Q=29代入（2）得：59、61；

7)．将n=6代入11n+8得74，将Q=74代入（2）得：149、151；

8)．将n=4代入11n+9得53，将Q=53代入（2）得：107、109；

9)．将n=8代入11n+10得98，将Q=98代入（2）得：197、199；

因为419、421；179、181；71、73；227、229；101、103；59、61；149、151；107、109；197、199都是孪生素数,则209、89、35、113、50、29、74、53、98都是孪生素数根，所以当n≥1取正整数时，在11n、11n+1、11n+2、11n+3、11n+4、11n+5、11n+6、11n+7、11n+8、11n+9、11n+10十一个集合中：至少有 9个集合是含有三生素数根的集合[16].

由以上例1、例2、例3、例4我们引入一个与孪生素数无穷多的等价命题如下：

命题8：当p≥3为素数，n≥1为自然数时，在pn,pn+1,pn+2,…,pn+p-1的p个剩余类集合中，至少有p-2个是含有孪生素数根的集合.

∵当p≥3为素数，n≥1为自然数时，pn,pn+1,pn+2,…,pn+p-1的p个剩余类集合中值不重复.

又∵素数有无穷多，素数只有2是偶数，则奇素数无穷多，则奇素数p-2还是无穷多个.从而若有无穷多个含孪生素数根的集合，就可得到无穷多个孪生素数.

∴若命题8成立，则孪生素数就有无穷多.

∴命题8与孪生素数无穷多命题是等价命题.

命题8的证明思路：

显然，当p≥3为素数，n≥1取正整数时，如果将pn,pn+1,pn+2,…,pn+p-1的p个剩余类集合分别以m≠p(m≥3取素数）为模，则由完全剩余系理论可知，若pn,pn+1,pn+2,…,pn+p-1的p个剩余类集合有几个集合是K∪L的子集合，则在K∪L中必然有几组与m相对应的，且除m余0、1、2、…、m-1的完全剩余系,用这种方法可以证明命题8成立.

**8.1．分析3n,3n+1,3n+2与K∪L的关系**

**8.1.1．分析3n与K∪L的关系**

第1种方法

∵当y=1时 2xy+x+y-1=3x，则3x是2xy+x+y-1的子集.

∴当n≥1取整数时，3n是{2xy+x+y｜x. y∈ $N^+$ }∪{2xy+x+y-1｜x. y∈ $N^+$ }的子集合.

第2种方法

将y=n，p=3代入（5）得:

3n

∵（5）式是2xy+x+y-1的an+b型奇素数类集合通解式.

又∵本文记：L={2xy+x+y-1｜x. y∈ $N^+$ }，其中x≥1, y≥1为自然数. $N^+$ :1,2,3, …为自然数.

∴n≥1取整数时，3n是L的子集合.

∴n≥1取整数时，3n是K∪L的子集合.

第3种方法

∵当n≥1取整数时,若3n是K∪L的子集合.则由完全剩余系理论可知[17]，有以下结果：

第1，当n≥1取整数，$n_1$ ≥1取整数时，若3n是K∪L的子集合，则15 $n_1$ , 15 $n_1$ +3, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +9, 15 $n_1$ +12也是K∪L的子集（因为{15 $n_1$ ｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{15 $n_1$ +3｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{15 $n_1$ +6｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{15 $n_1$ +9｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{15 $n_1$ +12｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }={3n｜n∈ $N^+$ }，即与将3n以5为模，由完全剩余系理论可知,3n必定分成1组除5余0，1，2,3,4完全剩余系相同）.

第2，当n≥1取整数，$n_1$ ≥1取整数时，若3n是K∪L的子集合，则21 $n_1$ , 21 $n_1$ +3, 21 $n_1$ +6, 21 $n_1$ +9, 21 $n_1$ +12, 21 $n_1$ +15, 21 $n_1$ +18也是K∪L的子集（因为{21 $n_1$ ｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +3｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +6｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +9｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +12｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +15｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +18｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }={3n｜n∈ $N^+$ }，即与将3n以7为模，由完全剩余系理论可知,3n必定分成1组除7余0,1,2，3,4,5,6完全剩余系相同）.

等等有很多类似第1和第2的结果，下面分析K∪L中有没有第1和第2的结果.

∵ 将 $p_1p_2\cdots p_k$ =3 ,p=5代入（8）得：

15 $n_1$，15 $n_1$ +3, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +9, 15 $n_1$ +12共5个an+b型奇合数类子集合.

显然{15 $n_1$ ｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{15 $n_1$ +3｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{15 $n_1$ +6｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{15 $n_1$ +9｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{15 $n_1$ +12｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }={3n｜n∈ $N^+$ }.

又∵（8） 是K∪L的an+b型奇素数类集合通解式之一.

∴当n≥1取整数时，若3n是K∪L的子集.则当 $n_1$ ≥1取整数时15 $n_1$ , 15 $n_1$ +3, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +9, 15 $n_1$ +12也是K∪L的子集,第1结果成立.

下面讨论第2结果

∵ 将 $p_1p_2\cdots p_k$ =3 ,p=7代入 （8） 得：

21 $n_1$ , 21 $n_1$ +3, 21 $n_1$ +6, 21 $n_1$ +9, 21 $n_1$ +12，21 $n_1$ +15, 21 $n_1$ +18

显然{21 $n_1$ ｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +3｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +6｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +9｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +12｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +15｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }∪{21 $n_1$ +18｜ $n_1$ ∈ $N^+$ }={3n｜n∈ $N^+$ }）.

又∵（8） 是K∪L的an+b型奇素数类集合通解式之一.

∴当n≥1取整数时，若3n是K∪L的子集.则当 $n_1$ ≥1取整数时，21 $n_1$ , 21 $n_1$ +3, 21 $n_1$ +6, 21 $n_1$ +9, 21 $n_1$ +12，21 $n_1$ +15, 21 $n_1$ +18也是K∪L的子集，第2结果成立.

**8.1.2．分析3n+1与K∪L的关系**

第1种方法

∵当y=1时2xy+x+y=3x+1;则3x+1是2xy+x+y的子集[18].

∴当n≥1取整数时，3n+1是{2xy+x+y｜x. y∈ $N^+$ }∪{2xy+x+y-1｜x. y∈ $N^+$ }的子集合.

∴n≥1取整数时，3n+1是K∪L的子集合.

第2种方法

将y=n，p=3代入（4）得:

3n+1

∵（4）是2xy+x+y的an+b型奇素数类集合通解式.

又∵本文记：K={2xy+x+y｜x. y∈ $N^+$ },其中x≥1, y≥1为自然数. $N^+$ :1,2,3, …为正自然数.

∴n≥1取整数时，3n+1是K的子集合.

∴n≥1取整数时，3n+1是K∪L的子集合.

第3种方法与讨论3n的第3种方法一样，比较长略去：

### 8.1.3．分析3n+2与K∪L的关系

第1种方法：

∵当n=1时，则Q=3n+2=3×1+2=5, 将Q=5代入（2）式得：11，13.

因为11,13是孪生素数，则5是孪生素数的根.

∴ 当n≥1取整数时，3n+2 是含有素数的根的集合.

又∵ 由命题2可知，含孪生素数根的集合必然不是K∪L子集合.

∴ 当n≥1取整数时3n+2不是K∪L的子集.

第2种方法：

∵当y=1时2xy+x+y=3x+1;2xy+x+y-1=3x，即：当x≥1取整数时3x+1是2xy+x+y的子集，3x是2xy+x+y-1的子集[19].

∴当x≥1取整数时3x+1和3x是不含孪生素数根的集合，从而n≥1取整数时3n+1和3n也是不含孪生素数根的集合.

于是3n+2是含有素数的根的集合（因孪生素数根只能在1，2和3n+2之中）.

又∵ 由命题2可知，含孪生素数根的集合必然不是K∪L子集.

∴ 当n≥1取整数时3n+2不是K∪L的子集合.

第3种方法：

∵当n≥1取整数时，若3n+2是K∪L的子集合.则由完全剩余系理论可知，有以下结果：

第1，当 $n_1$ ≥1取整数时，由15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +5, 15 $n_1$ +8, 15 $n_1$ +11, 15 $n_1$ +14五个集合组成的一组除5余0，1，2,3,4完全剩余系也必定在K∪L中（因为将3n+2以5为模，由完全剩余系理论可知,3n+2必定分成1组除5余0，1，2,3,4完全剩余系如下[20]：

{3n+2∣n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ +2∣ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +5∣ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +8∣ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +11∣ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +14∣ $n_1 \in N^+$ }）.

第2，当 $n_1$ ≥1取整数时，由21 $n_1$ +2, 21 $n_1$ +5, 21 $n_1$ +8, 21 $n_1$ +11, 21 $n_1$ +14，21 $n_1$ +17, 21 $n_1$ +20七个集合组成的一组除7余0,1,2,3,4,5,6完全剩余系也必定在K∪L中（因为将3n+2以7为模，由完全剩余系理论可知,3n+2必定分成1组除7余0,1,2，3,4,5,6完全剩余系如下：

{3n+2∣n∈ $N^+$ }={21 $n_1$ +2∣ $n_1 \in N^+$ }∪{21 $n_1$ +5∣ $n_1 \in N^+$ }∪{21 $n_1$ +8∣ $n_1 \in N^+$ }∪{21 $n_1$ +11∣ $n_1 \in N^+$ }∪{21 $n_1$ +14∣ $n_1 \in N^+$ }∪{21 $n_1$ +17∣ $n_1 \in N^+$ }∪{21 $n_1$ +20∣ $n_1 \in N^+$ }）.

等等有很多类似第1和第2的结果.下面分析K∪L中有没有第1和第2的结果，从而也可以证明，当n≥1取整数时3n+2是不是K∪L的子集合.

∵15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +5, 15 $n_1$ +8, 15 $n_1$ +11, 15 $n_1$ +14和21 $n_1$ +2, 21 $n_1$ +5, 21 $n_1$ +8, 21 $n_1$ +11, 21 $n_1$ +14，21 $n_1$ +17, 21 $n_1$ +20都是an+b型奇合数类子集合.

由前面预备命题已证明K∪L的所有an+b型奇合数类子集合可表为（7）、（8），即K∪L的所有an+b型奇合数类子集合都在（7）、（8）中.

∴假设当n≥1取整数时3n+2是K∪L的子集合，则推出15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +5, 15 $n_1$ +8, 15 $n_1$ +11, 15 $n_1$ +14和21 $n_1$ +2, 21 $n_1$ +5, 21 $n_1$ +8, 21 $n_1$ +11, 21 $n_1$ +14，21 $n_1$ +17, 21 $n_1$ +20都在（7）、（8）中.

先在（7）、（8）中寻找15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +5, 15 $n_1$ +8, 15 $n_1$ +11, 15 $n_1$ +14

显然由（7），（8）可知，当 $n_1$ 的系数是15时，有且仅有 $p_1 p_2 \cdots p_k=3$ ,p=5和 $p_1 p_2 \cdots p_k=5$ ,p=3情形：

（ⅰ） $p_1 p_2 \cdots p_k=3$ ,p=5

将 $p_1 p_2 \cdots p_k=3$ ,p=5代入（7）得：15 $n_1$ +1, 15 $n_1$ +4, 15 $n_1$ +7, 15 $n_1$ +10, 15 $n_1$ +13.

将 $p_1 p_2 \cdots p_k=3$ ,p=5代入（8）得：15 $n_1$， 15 $n_1$ +3, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +9, 15 $n_1$ +12.

（ⅱ） $p_1 p_2 \cdots p_k=5$ ,p=3

将 $p_1 p_2 \cdots p_k=5$ ,p=3代入（7）得：15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +7, 15 $n_1$ +12.

将 $p_1 p_2 \cdots p_k=5$ ,p=3代入（8）得：15 $n_1$ +1, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +11.

∵显然从（ⅰ）；（ⅱ）所述中只找到15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +11.

缺少 15 $n_1$ +5, 15 $n_1$ +8, 15 $n_1$ +14.

说明在K∪L中不存在由15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +5, 15 $n_1$ +8, 15 $n_1$ +11, 15 $n_1$ +14这一组除5余0,1,2,3,4的完全剩余系.

出现矛盾.假设不成立.

∴3n+2不是K∪L的子集.

用同样方法也可以证明在K∪L中不存在由21 $n_1$ +2, 21 $n_1$ +5, 21 $n_1$ +8, 21 $n_1$ +11, 21 $n_1$ +14，21 $n_1$ +17, 21 $n_1$ +20七个集合组成的一组除7余0,1,2,3,4,5,6完全剩余系，方法与上类同，也可以证明3n+2不是K∪L的子集，略去.

例如：当n=1时，则Q=3n+2=3×1+2=5, 将Q=5代入（2）式得：11，13.

因为11,13是孪生素数组，则5是孪生素数的根.

所以当n≥1取正整数时，3n+2 集合是含有素数的根的集合.

又∵ 由命题2可知，含孪生素数根的集合必然不是K∪L子集合.

∴ 当n≥1取正整数时3n+2不是K∪L的子集.

用第3种证明3n+2不是K∪L子集的方法，同样可证明5n,5n+3,5n+4,7n等等不是K∪L子集.显然n的系数越大，证明越长，显然不能证明全部素数.但是，从第3种证明3n+2不是K∪L子集的方法就比较容易理解下面的证明.

### 8.2．p=3

第1步：分析3n,3n+1,3n+2分别以5为模的结果[21].

将3n,3n+1,3n+2以5为模，由完全剩余系理论可得3组除5余0,1,2,3,4的完全剩余系，即：

{3n｜n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ ｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +3｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +6｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +9｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +12｜ $n_1 \in N^+$ }

{3n+1｜n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ +1｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +4｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +7｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +10｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +13｜ $n_1 \in N^+$ }

{3n+2｜n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ +2｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +5｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +8｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +11｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +14｜ $n_1 \in N^+$ }

合计共得到15个 $n_1$ 系数都是15的an+b型奇合数类集合.组成了3组除5余0,1,2,3,4完全剩余系，其特点是：

除5余0占3个；

除5余1占3个；

除5余2占3个；

除5余3占3个；

除5余4占3个；

合计共得到15个 $n_1$ 系数都是15的an+b型奇合数类集合，组成了3组除5余0,1,2,3,4完全剩余系.

第2步，从（7），（8）中寻找所有 $n_1$ 的系数是15的an+b型奇合数类的集合.

显然由（7），（8）式可知，当 $n_1$ 的系数是15时，有且仅有 $p_1p_2\cdots p_k$ =3 ,p=5和 $p_1p_2\cdots p_k$ =5 ,p=3情形：

#### 8.2.1． $p_1p_2\cdots p_k$ =3，p=5

将 $p_1p_2\cdots p_k$ =3 ,p=5代入 （7） 式得：15 $n_1$ +1, 15 $n_1$ +4, 15 $n_1$ +7, 15 $n_1$ +10, 15 $n_1$ +13共5个集合且除5余0,1,2,3,4各一个.

将 $p_1p_2\cdots p_k$ =3 ,p=5代入（8）式得：15 $n_1$ , 15 $n_1$ +3, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +9, 15 $n_1$ +12，共5个集合且除5余0,1,2,3,4各一个.

#### 8.2.2． $p_1p_2\cdots p_k$ =5，p=3

将 $p_1p_2\cdots p_k$ =5 ,p=3代入（7）式得：15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +7, 15 $n_1$ +12, 共3个集合且都是除5余2.

将 $p_1p_2\cdots p_k$ =5 ,p=3代入 （8） 式得： 15 $n_1$ +1, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +11, 共3个集合且都是除5余1各一个.

由8.2.1，8.2.2所述合计得5+5+3+3=16个子集.

再将16个子集按除5余0,1,2,3,4分类如下：

除5余0的占2个；

除5余1的占5个；

除5余2的占5个；

除5余3的占2个；

除5余4的占2个；

合计在（7）、（8）中得到2+5+5+2+2=16个 $n_1$ 系数都是15的an+b型奇合数类集合.

其中最重要的结果是：除5余0、3、4的an+b型奇合数类集合各有仅有2个.

第3步，分析K∪L中最多可组成几组由 $n_1$ 的系数为15的an+b型奇合数类子集组成的除5余0,1,2,3,4的完全剩余系.

∵由第2步得，最重要的结果是：在（7）、（8）中 $n_1$ 系数都是15且除5余0、3、4的an+b型奇合数类集合各有仅有2个.

∴在（7）、（8）中最多两组由 $n_1$ 系数都是15的an+b型奇合数类子集组成的除5余0、1、2、3、4的完全剩余系.

又∵由预备命题可知，K∪L的an+b型奇合数类子集通解有且仅有（7），（8）.

∴在K∪L中最多组成两组 $n_1$ 系数都是15且除5余0、1、2、3、4的完全剩余系.

∴在3n,3n+1,3n+2中最多有2个是K∪L的子集.

由命题2可知，不是K∪L的正整数集合，必然是含孪生素数根集合.

由此推出当n≥1取自然数时，在3n,3n+1,3n+2中有1个是含有孪生素数的根集合.

例如:当n=1时,则Q=3n+2=3×1+2=5, 将Q=5代入（2）式得：11，13.

因为11,13是孪生素数组，则5是孪生素数的根，即当n≥1取正整数时，3n+2 集合是含有素数根的集合.所以当n≥1取正整数时，在3n，3n+1，3n+2三个集合中，至少有 1个集合是含有素数的根的集合.

∴当p=3时， 命题8成立.

### 8.3．p=5

第1步：分析5n,5n+1,5n+2，5n+3,5n+4分别以3为模的结果.

将5n,5n+1,5n+2，5n+3,5n+4分别以3为模，由完全剩余系理论可得5组除3余0，1，2的完全剩余系，即：

{5n｜n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ ｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +5｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +10｜ $n_1 \in N^+$ }

{5n+1｜n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ +1｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +6｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +11｜ $n_1 \in N^+$ }

{5n+2｜n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ +2｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +7｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +12｜ $n_1 \in N^+$ }

{5n+3｜n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ +3｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +8｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +13｜ $n_1 \in N^+$ }

{5n+4｜n∈ $N^+$ }={15 $n_1$ +4｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +9｜ $n_1 \in N^+$ }∪{15 $n_1$ +14｜ $n_1 \in N^+$ }

合计共得到15个 $n_1$ 系数都是15的an+b型奇合数类集合.组成了5组除3余0,1,2的完全剩余系，其特点是[22]：

除3余0占5个；

除3余1占5个；

除3余2占5个；

合计共得到5+5+5=15个 $n_1$ 系数都是15的an+b型奇合数类集合.

第2步，从（7），（8）中寻找所有 $n_1$ 的系数是15的an+b型奇合数类的集合

∵显然由（7），（8）可知，当 $n_1$ 的系数是15时，有且仅有 $p_1p_2\cdots p_k=3$ ,p=5和 $p_1p_2\cdots p_k=5$ ,p=3情形：

### 8.3.1． $p_1p_2\cdots p_k$ =3，p=5

将 $p_1p_2\cdots p_k=3$ ,p=5代入 （7） 式得：15 $n_1$ +1, 15 $n_1$ +4, 15 $n_1$ +7, 15 $n_1$ +10, 15 $n_1$ +13共5个集合且都是除3余1.

将 $p_1p_2\cdots p_k=3$ ,p=5代入（8）式得：15 $n_1$ , 15 $n_1$ +3, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +9, 15 $n_1$ +12共5个集合且都是除3余0.

### 8.3.2． $p_1p_2\cdots p_k$ =5，p=3

将 $p_1p_2\cdots p_k=5$ ,p=3代入 （7） 式得：15 $n_1$ +2, 15 $n_1$ +7, 15 $n_1$ +12, 共3个集合且除3余0,1,2各一个.

将 $p_1p_2\cdots p_k=5$ ,p=3代入 （8） 式得： 15 $n_1$ +1, 15 $n_1$ +6, 15 $n_1$ +11, 共3个集合且除3余0，1,2各一个.

由8.3.1，8.3.2所述合计得5+5+3+3=16个子集.

再将16个子集按除3余0，1，2分类如下：

除3余0的占7个；

除3余1的占7个；

除3余2的占2个；

合计16个集合.

合计在（7）、（8）中得到7+7+2=16个 $n_1$ 系数都是15的an+b型奇合数类集合.

其中最重要的结果是：除3余2的an+b型奇合数类集合有仅有2个.

第3步，分析K∪L中最多可组成几组由 $n_1$ 的系数为15的an+b型奇合数类子集组成的除3余0,1,2的完全剩余系.

∵由第2步得，最重要的结果是：在（7）、（8）中 $n_1$ 系数都是15且除3余2的an+b型奇合数类集合有仅有2个.

∴在（7）、（8）中最多组成两组 $n_1$ 系数都是15且除3余0、1、2的完全剩余系.

又∵由预备命题可知，K∪L的an+b型奇合数类子集通解有且仅有（7），（8）.

∴在K∪L中最多组成两组 $n_1$ 系数都是15且除3余0、1、2的完全剩余系.

由此推出当n≥1取自然数时，5n,5n+1,5n+2，5n+3,5n+4中最多有2个集合是K∪L的子集.

则：5n,5n+1,5n+2，5n+3,5n+4中有3个集合不是K∪L的子集.

由命题2可知，不是K∪L的正整数集合，必然含孪生素数根.

由此推出当n≥1取自然数时，5n,5n+1,5n+2，5n+3,5n+4有3个集合是含有孪生素数根的集合.

如 1）.当n=1时，5n+3=8, 将Q=8代入（2）得：17，19；

如 2）.当n=2时，5n+4=14, 将Q=14代入（2）得：29，31；

如 3）.当n=1时，5n=5, 将Q=5代入（2）得：11，13；

因为17，19；29，31；11，13都是孪生素数，则8，14，5都是孪生素数根，所以当n≥1取正整数时，在5n，5n+1，5n+2，5n+3，5n+4五个集合中：有 3个集合是含有孪生素数根的集合.

∴当p=5时， 命题8成立.

### 8.4．p≥7取素数

显然pn, pn+1, pn+2, …,pn+p-1的p个集合有几个是K∪L的集合，与pn, pn+1, pn+2, …,pn+p-1分别以m为模的m大小无关（显然m越大对应的完全剩余系子集越多，反之越少，所以m越小越简单），但m≠p取奇素数.

因为 p≥7取素数，所以取m=3最简单.

第1步：分析pn, pn+1, pn+2, …,pn+p-1的p个集合，分别以3为模的结果.

将pn, pn+1, pn+2, …,pn+p-1的p个集合，分别以3为模，由完全剩余理论可知，可得p组除3余0，1，2完全剩余系.即

{pn｜n∈ $N^+$ }={3p $n_1$ ｜ $n_1\in N^+$ }∪{3p $n_1$ +p｜ $n_1\in N^+$ }∪{3p $n_1$ +2p｜ $n_1\in N^+$ }，

{pn+1｜n∈ $N^+$ }={3p $n_1$ +1｜ $n_1\in N^+$ }∪{3p $n_1$ +p+1｜ $n_1\in N^+$ }∪{3p $n_1$ +2p+1｜ $n_1\in N^+$ }，

{pn+2｜n∈ $N^+$ }={3p $n_1$ +2｜ $n_1\in N^+$ }∪{3p $n_1$ +p+2｜ $n_1\in N^+$ }∪{3p $n_1$ +2p+2｜ $n_1\in N^+$ }，

…

{pn+p-1｜n∈ $N^+$ }={3p $n_1$ +p-1｜ $n_1\in N^+$ }∪{3p $n_1$ +2p-1｜ $n_1\in N^+$ }∪{3p $n_1$ +3p-1｜ $n_1\in N^+$ }.

共得到3p个 $n_1$ 的系数都是3p的an+b型奇合数类的集合.

其中重要结果是：

除3余0的占p个；

除3余1的占p个；

除3余2的占p个；

合计3p个.

第2步，从（7），（8）中寻找所有 $n_1$ 的系数是3p的an+b型奇合数类的集合.

显然由（7），（8）可知，当 $n_1$ 的系数是3p时，有且仅有 $p_1p_2\cdots p_k=3$ ,p=3情形：

### 8.4.1． $p_1p_2\cdots p_k$ =3

将 $p_1p_2\cdots p_k=3$ 代入（7）式得：3p $n_1$ +1, 3p $n_1$ +4, 3p $n_1$ +7, …, 3p $n_1$ +3(p-1)+1共p个，且都是除3余1.

将 $p_1p_2\cdots p_k=3$ 代入（8）式得：3p $n_1$ , 3p $n_1$ +3, 3p $n_1$ +6, …, 3p $n_1$ +3(p-1)共p个，且都是除3余0.

### 8.4.2．p=3

将p=3代入（7）式得：

$3\ p_1p_2\cdots p_k\ \ n_1+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$，$3\ p_1p_2\cdots p_k\ \ n_1+p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$，$3\ p_1p_2\cdots p_k\ n_1+2\ p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$. 显然当 $p_1p_2\cdots p_k$=p时，$n_1$的系数是3p,将 $p_1p_2\cdots p_k$=p代入 $3\ p_1p_2\cdots p_k\ \ n_1+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$，$3\ p_1p_2\cdots p_k\ n_1+p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$，$3\ p_1p_2\cdots p_k\ n_1+2\ p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$得：$3p\ n_1+\dfrac{p-1}{2}$，$3p\ n_1+p+\dfrac{p-1}{2}$, $3p\ n_1+2p+\dfrac{p-1}{2}$

∵$\{3p\ n_1+\dfrac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup\{3p\ n_1+p+\dfrac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup\{3p\ n_1+2p+\dfrac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\}=\{pn+\dfrac{p-1}{2}\mid n\in N^+\}$

即$3p\ n_1+\dfrac{p-1}{2}$，$3p\ n_1+p+\dfrac{p-1}{2}$，$3p\ n_1+2p+\dfrac{p-1}{2}$，是$pn+\dfrac{p-1}{2}$的全体正整数以3为模，分解的完全剩余系子集，则除3余0，1，2各一个.

∴在$3p\ n_1+\dfrac{p-1}{2}$，$3p\ n_1+p+\dfrac{p-1}{2}$，$3p\ n_1+2p+\dfrac{p-1}{2}$中：除3余0占一个；除3余1占一个；除3余2占一个，共计3个.

将p=3代入（8）式得：

$3\ p_1p_2\cdots p_k\ \ n_1+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$，$3\ p_1p_2\cdots p_k\ \ n_1+p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$，$3\ p_1p_2\cdots p_k\ n_1+2\ p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$.显然当 $p_1p_2\cdots p_k$=p时，$n_1$的系数是3p,

将 $p_1p_2\cdots p_k$=p代入$3\ p_1p_2\cdots p_k\ n_1+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$，$3\ p_1p_2\cdots p_k\ n_1+p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$，$3\ p_1p_2\cdots p_k\ n_1+2\ p_1p_2\cdots p_k+\dfrac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$得：$3p\ n_1+\dfrac{p-1}{2}-1$, $3p\ n_1+p+\dfrac{p-1}{2}-1$, $3p\ n_1+2p+\dfrac{p-1}{2}-1$.

∵$\{3p\ n_1+\dfrac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{3p\ n_1+p+\dfrac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{3p\ n_1+2p+\dfrac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}=\{pn+\dfrac{p-1}{2}-1\mid n\in N^+\}$.

即：$3p\ n_1+\dfrac{p-1}{2}-1$, $3p\ n_1+p+\dfrac{p-1}{2}-1$, $3p\ n_1+2p+\dfrac{p-1}{2}-1$，是$pn+\dfrac{p-1}{2}-1$以3为模分解的完全剩余系子集，则除3余0，1，2各一个.

∴在$3p\ n_1+\dfrac{p-1}{2}-1$, $3p\ n_1+p+\dfrac{p-1}{2}-1$, $3p\ n_1+2p+\dfrac{p-1}{2}-1$中：除3余0占一个；除3余1占一个；除3余2占一个，共计3个.

由8.4.1，8.4.2所述合计得p+p+3+3=2p+6个子集.

再将2p+6个子集按除3余0，1，2分类如下：

除3余0的占p+2个；

除3余1的占p+2个；

除3余2的占2个；

合计2p+6个，其中最重要的是除3余2有仅有两个.

第3步，分析K∪L中最多可组成几组由$n_1$的系数为3p的an+b型奇合数类子集组成的除3余0，1，2的完全剩余系.

∵由第2步得，在（7）、（8）中$n_1$系数是3p的an+b型奇合数类集合共有2p+6个，其中，除3余0的占p+2个；除3余1的占p+2个；除3余2的占2个（最重要）；

∴在2p+6个集合中最多可组成两组除3余0，1，2的完全剩余系.

∴在（7）、（8）中最多组成两组$n_1$系数都是3p且除3余0、1、2的完全剩余系.

又∵由预备命题可知，K∪L的an+b型奇合数类子集通解有且仅有（7），（8）.

∴在K∪L中最多组成两组$n_1$系数都是3p且除3余0、1、2的完全剩余系.

由此推出当n≥1取自然数时，pn, pn+1, pn+2, …,pn+p-1的p个集合中最多有2个集合是K∪L的子集.

则：在pn, pn+1, pn+2, …,pn+p-1的p个集合中，有p-2个集合不是K∪L的子集.

由命题2可知，不是K∪L的正整数集合，必然含孪生素数根.

由此推出当n≥1取自然数时，在pn, pn+1, pn+2, …,pn+p-1的p个集合中，有p-2个集合是含有孪生素数根的集合.

∴命题8成立

又∵前面已证明命题8与孪生素数有无穷多命题等价.

∴孪生素数有无穷多,孪生素数猜想成立.

## 9．结语

本文用辛达拉姆（Snndaram）筛法找出了一种有别于用爱氏筛法(Eratosthenes)[23]求素数、孪生素数、三生素数的方法，发现了数阵2xy+x+y的an+b型子集通解，从三种证明3n+2不是K∪L的子集方法中，发现了证明孪生素数无穷多的方法，并给出了详细的证明、证明了孪生素数猜想成立.

## 参考文献


[1] 李维超。辛达拉姆筛法的推广[J]。数学通报，2001,（3）:38—39。

[2] 李复中。初等数论选讲[M].吉林:东北师范大学出版社，1984：85。

[3] 华罗庚。数论导引[M].北京：科学出版社，1979。

[4] 闫奎迎。勾股数组的排列顺序及应用[A].中国初等数学研究文集（二）[C].香港：中国科学文化出版社，2003:135—138。

[5] 王文娜，闫亮，闫魁迎. 用辛达拉姆筛法探讨孪生素数无穷多[J].许昌学院学报，2014,33（2）:31—36。

[6] 王元. 谈谈素数{M}.上海：上海教育出版社，1978.2-10。

[7] [美]G.波利亚.数学与猜想[M[.北京:科学出版社,2001：64-70。

[8] 潘承洞，潘承彪,哥德巴赫猜想[M].北京 科学出版社,2001。

[9] 吴在渊.数论初步[M]北京 商务印书馆，1931。

[10] 闵嗣鹤，严士键. 初等数论[M}.北京:高等出版社，1958。

[11] 柯召，孙琦 谈谈不定方程[M].上海:上海教育出版社，1960。

[12] 闫奎迎,王文娜.关于奇合数和奇素数一般解的探讨[J].许昌师专学报，1996，15（4）:49—50。

[13] 闫奎迎,王文娜.关于孪生素数无穷多问题的探讨[J] 许昌师专学报， 1998，17（1）:6—10。

[14] 闫奎迎,王文娜.关于孪生素数猜想证明的探讨[J].许昌师专学报， 2000，19（2）:15—21。

[15] 闫奎迎.勾股数组的排列顺序[J].河南教育学院学报：教育教学研究专辑，1996：7—11。

[16] 闫奎迎.猜想. 信阳师范学院学报[J].1997，10(3):8。

[17] 闫奎迎.关于费尔马定理证明的探讨 [J].许昌师专学报，1991.10（2）: 26—37。

[18] U. Dudley, EIEMENTARY NUMBEB THEORY (W. H. Freemen and Co. 1969)（有中译本《基础数学》，周仲良译，上海科学技术出版社）。

[19] R. P. Burn. A Pathway into Nnmber theory. (Cambridge University Press 1982).

[20] Hasse. H. Zahlentheorie (Berlin Akademie-Verlag, 1949).

[21] Hasse, H. Vorlesungen uber Zahlentheorie (Berlin, Springer, 1950).

[22] 吴在渊，数论初步（商务印书馆，1931）。

[23] 陈景润.初等数论[M].北京：科学出版社，1978.3-20。


## 作者简介

**闫魁迎**（1957—），男，河南临汝市人，经济师，大专.先后在许昌学院学报、河南教育学院学报、信阳师范学院学报、中国初等数学研究文集等期刊发表数学文章10篇.发表的“关于孪生素数无穷多问题的探讨”，99年获得河南省第六届自然科学优秀论文叁等奖，发表的“勾股数组的排列顺序”，在2001年全国“紫金杯”数学创新教育优秀论文评选交流活动中荣获贰等奖。